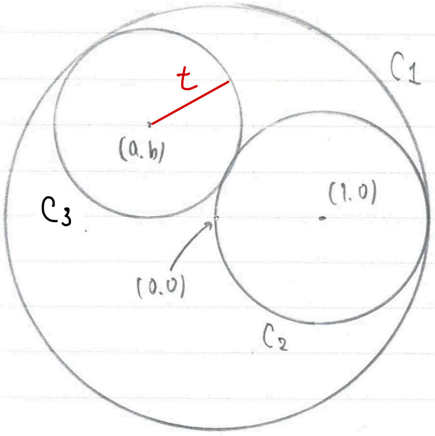
2009年 東大数学 文系第1問



(1) $\begin{cases} C_1 \text{の中心は} (0,0)、\text{半径は } 2 \\ C_2 \text{の} \quad : \quad (1,0) \quad : \quad 1 \\ C_3 \text{の} \quad : \quad (a,b) \quad : \quad t \end{cases}$

C_1とC_3の中心間の距離は $\sqrt{a^2+b^2}$

C_2とC_3の 〃 $\sqrt{(a-1)^2+b^2}$ なので

C_1とC_3の内接条件より $\sqrt{a^2+b^2} = |2-t|$

C_2とC_3の外接条件より $\sqrt{(a-1)^2+b^2} = 1+t$

あとは解くだけ 元はa,b

それぞれ2乗して $a^2+b^2 = t^2-4t+4$

$a^2-2a+1+b^2 = t^2+2t+1$

差をとり $2a-1 = -6t+3$

$a = -3t+2$

$a^2+b^2 = t^2-4t+4$ に代入して

$b^2 = t^2-4t+4-(-3t+2)^2$

$= -8t^2+8t$

√の中身>0

$b>0$ より $-8t^2+8t>0 \iff 0<t<1$

このとき $b=\sqrt{-8t^2+8t}$

よって $a=-3t+2$, $b=\sqrt{-8t^2+8t}$ tの範囲は $0<t<1$ //

(2) $b=\sqrt{-8t^2+8t}$ の最大は $-8t^2+8t$ の最大の場合と一致する。

一言、ことわりを入れておく。

$-8t^2+8t = -8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2$ より

$0<t<1$ の範囲での最大値は $t=\frac{1}{2}$ のとき 2 である。

よって $b=\sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$ の最大値は

$t=\frac{1}{2}$ のとき $\sqrt{2}$ //

半径r, R の2円の中心間距離がdのとき

$\begin{cases} \text{内接条件は} \quad d=|R-r| \\ \text{外接条件は} \quad d=R+r \end{cases}$

オマケ

$y=\sqrt{x}$ は単調増加。

つまり、xを大きくすると、$y=\sqrt{x}$も大きくなる。

よって、yのMaxはxのMaxを探せばよいため。

今回は $-8t^2+8t$ の Max を計算している